**Definición 6. Función de Distribución Acumulada.** Sea una variable aleatoria con recorrido . La función de distribución acumulada de la variable aleatoria es la función definida por

**Observación 2.** Para obtener la función de distribución acumulada de una variable aleatoria cuya imagen es se siguen los siguientes pasos

* Tener la función de densidad de la variable aleatoria

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

* Localizar en el eje X los puntos .
* Antes de ( en el intervalo )la función está formada por un escalón de altura 0.
* Después de ( en el intervalo ) la función está formada por un escalón de altura 1,
* La función de distribución acumulada está formada por escalones que van subiendo.
* En el intervalo la altura del escalón es , donde es la función de densidad.
* Para el intervalo la altura del escalón es .
* Para el intervalo la altura del escalón es .

**Teorema 2. Propiedades de la Función de Distribución Acumulada.** Sea la función de distribución acumulada de una variable aleatoria entonces

1. es creciente
2. Cálculo de probabilidades con la función de distribución acumulada. Sea un intervalo entonces

Tamaño del salto

**Ejemplo 9.** Se lanza una moneda. Construya la gráfica de la función de distribución acumulada de la variable aleatoria definida por y . Además y .

**Solución.** El rango es y la función de densidad es

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | -1 | 1 |
|  | 0.8 | 0.2 |

-1 1

Los puntos en determinan cuántos escalones debemos formar. En este caso debemos hacer 3 escalones en los intervalos y

Antes de -1 la función está formada por un escalón de altura 0 y después de 1 está formada por un escalón de altura 1.

Para el intervalo la función está formada por un escalón de altura 0.8. En la tabla póngase entre -1 y 1 y sume los números que están en el segundo renglón y a la izquierda. Así que la función de distribución acumulada está definida por

**Ejemplo 10.** Construya la gráfica de la función de distribución acumulada de la variable aleatoria del ejemplo 6, .

**Solución.** Como el rango de la variable aleatoria es , entonces antes de 2 hay un escalón de altura cero y después de 7 hay un escalón den altura 1.

* En el intervalo hay un escalón de altura
* En el intervalo hay un escalón de altura
* En el intervalo hay un escalón de altura
* En el intervalo hay un escalón de altura
* En el intervalo hay un escalón de altura .

Así que la función de distribución acumulada está definida como:

**Ejemplo 11.** Obtenga la función de distribución acumulada de la variable aleatoria del ejemplo 7, .

**Solución.** Aprovechando lo que se hizo en el ejemplo 7 podemos escribir la función de distribución acumulada como

Su gráfica es:

**Ejercicios.**

1. La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria es

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 |
|  | 2p | p | 4p |

1. Encuentre la función de distribución acumulada, (b) con la función de distribución acumulada calcular , (c) hacer lo mismo que en (b), pero con la función de densidad.

**Respuestas:** (a)

1. 5/7
2. Una firma de inversiones ofrece a sus clientes bonos municipales que vencen después de diferente número años. Dado que la distribución acumulada de , el número de años para el vencimiento de un bono seleccionado aleatoriamente, es

Encuentre (a) la función de densidad, (b) , (c), (d) .

**Respuestas:** (a)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 3 | 5 | 7 |
|  | 1/4 | 1/4 | 1/4 | 1/4 |

1. ¼, (c) ½, (d) ½
2. La función de densidad de una variable aleatoria discreta es

Encuentre la función de distribución acumulada.

**Respuesta:**

1. Sea una variable aleatoria con función de distribución acumulada , demuestre que para enteros y (a) , (b) .

Ayuda: , hacer lo mismo con y simplificar. Hacer algo similar con (b)

1. El número de defectos en un automóvil es una variable aleatoria cuya función de distribución acumulada es

Calcule las siguientes probabilidades directamente de (a) , (b) , (c) , (d) .

Respuesta: (a) 0.29, (b)

**Definición 4. Función de Distribución Acumulada.** Sea una variable aleatoria continua, definimos la función de distribución acumulada o simplemente de como

**Teorema 1. Propiedades de la Función de Densidad y Distribución Acumulada.**

* 1. con la función de densidad.
  2. es monótona creciente, es decir, .
  3. y .

**Ejemplo 3.** Sea una variable aleatoria continua con función de densidad

Encuentre la función de distribución acumulada, después aplique la propiedad 1.2 para obtener la función de densidad.

**Solución.** Como la función de densidad está definida en 3 partes: antes de 0, entre 0 y 2 y después de 2, vamos a dividir el problema en 3 casos:

* Si y tomando en cuenta que vale 0 antes de 0 tenemos:
* Si entonces tomando en cuenta que antes de 0 vale 0 tenemos
* Si y tomando en cuenta que vale 0 antes de 0 y después de 2 tenemos

Así la función de distribución acumulada está definida por:

La gráfica de la función de distribución acumulada es:

Ahora derivamos la función de distribución acumulada para obtener la de densidad y de nuevo contemplamos 3 casos:

* Si
* Si
* Si

**Ejemplo 4.** Obtenga la función de distribución acumulada a partir de la función de densidad del ejemplo 2

**Solución.** Como esta función está definida en 4 intervalos: y en donde la función vale y 0 respectivamente, debemos contemplar 4 casos:

* Si
* Si dividimos la integral en 2
* Si dividimos la integral en 3
* Si dividimos la integral en 4

Juntando los diferentes casos podemos concluir que la función de distribución acumulada está definida como:

Observe que la división de una integral en varias se debe a que la fórmula de cambia en cada intervalo. ¿Qué obtiene si deriva la función de distribución acumulada? ¿Cuál es la gráfica de ?

**Ejemplo 5.** Sea una variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidad está dada por

Encuentre la función de distribución acumulada.

**Solución.** Como

Debemos considerar 2 casos

* .

Por lo tanto la función de distribución acumulada está definida como:

**Teorema 2. Más Propiedades de la Función de Distribución Acumulada.** Sea una variable aleatoria continua con función de distribución acumulada entonces

**Demostración.** Demostraremos solamente la primera

**Ejemplo 6.** La función de distribución acumulativa de una variable aleatoria continua es

Calcular (a) , (b) , (c) .

**Solución.**  Utilizando las fórmulas del teorema 2 tenemos

**Ejercicios.**

1. Encuentre la función de densidad de la variable aleatoria cuya función de distribución acumulada es
2. (b)

Respuesta: (a) (b)

1. La proporción del tiempo por día que todas las cajas registradoras a la salida de un supermercado están ocupadas, es una variable aleatoria con una función de densidad
2. Encuentre el valor de (b) encuentre la función de distribución acumulada, (c) utilice la función de distribución acumulada para calcular , (c) responda (b) con la función de densidad, (d) derive la función de distribución acumulada para obtener la función de densidad.

Respuesta: (a) , (b) , (b) 0.6254